ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

2020-2021 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 212 ANALİZ IV QUİZ SORULARI

1) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^p}{x^2 - xy + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonu $(0,0)$ da sürekli olacak şekildeki p sayılarını bulunuz.

2) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonu için $f_{xy}(0,0)$ ve $f_{xx}(0,0)$ kısmi türevlerinin varlığını araştırınız.

3) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında diferansiyellenebilir olup olmadığını inceleyiniz.

4) $z = f(x,y) = x^3 + y^4$ yüzeyinin $(1,3)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini yazınız.

5) $\left.\dfrac{d}{dt} f(x_0 + th)\right|_{t=0} = Df(x_0)h$ olduğunu gösteriniz.

Not: Sınav **12.04.2021** Pazartesi günü **16:00-17:30** arasında gerçekleşecektir. Süre 90 dakikadır. E-posta yoluyla iletilen ve zamanında teslim edilmeyen cevaplar değerlendirilmeyecektir. Başarılar

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

① $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^p}{x^2-xy+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ fonksiyonunun

(0,0) da sürekli olabilmesi için p ne olmalıdır?

Çözüm: f fonksiyonunun (0,0) da sürekli olabilmesi için

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^p}{x^2-xy+y^2}=f(0,0)=0$$ olması gerekir. $y=mx$ şeklindeki doğrularla yaklaşıldığında da limit değerinin 0 çıkması gerekir. O halde

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot m^p x^p}{x^2-xmx+m^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{m^p x^{p+1}}{x^2(1-m+m^2)}=0$$

olmalıdır.

$p+1<2$ ise $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{m^p}{x^{2-(p+1)}(1-m+m^2)}$ ifadesi $-\infty$ ya da $+\infty$ olacağından f sürekli olamaz.

$p+1=2$ ise $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{m^p x^{p+1}}{x^2(1-m+m^2)}=\dfrac{m^p}{1-m+m^2}$ olup

yine f sürekli olamaz.

$p+1>2$ ise $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{m^p x^{p+1}}{x^2(1-m+m^2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{m^p x^{(p+1)-2}}{1-m+m^2}=0$

olup f süreklidir.

Bu durumda f fonksiyonun (0,0) da sürekli olabilmesi için $p>1$ olmalıdır.

② $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun

$(0,0)$ noktasında f_{xy} ve f_{xx} kısmi türevlerini bulunuz.

Çözüm:

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k}$$

$$f_x(0,k) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,k) - f(0,k)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{hk^2}{h^2+k^4} - 0}{h}$$

$$= \frac{1}{k^2}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{\frac{1}{k^2} - 0}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{1}{k^3} \quad \underline{\underline{\text{YOK}}} \quad \begin{pmatrix} k \to 0^+ \text{ limit } \infty \\ k \to 0^- \text{ limit } -\infty \end{pmatrix}$$

$$f_{xx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_x(h,0) - f_x(0,0)}{h}$$

$$f_x(h,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(h+k,0) - f(h,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

$$f_{xx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = \underline{\underline{0}}$$

(3) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ noktasında dif.bilir olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limiti olmadığından $f(x,y)$, $(0,0)$ da sürekli değildir, dolayısıyla f, $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ de dif.bilir değildir.

(4) $z=f(x,y)=x^3+y^4$ yüzeyinin $(1,3)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini yazınız.

Çözüm: $f(x,y)=x^3+y^4$, $Df(x,y)=(3x^2,4y^3)$, $Df(1,3)=(3,108)$

teğet düzlem denklemi : $z=f(x_0,y_0)+Df(x_0,y_0)\big((x,y)-(x_0,y_0)\big)$

$$= 82+(3,108)\cdot\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix}$$

$$= 82+3(x-1)+108(y-3)$$

$$\Rightarrow \boxed{z=-245+3x+108y}$$

(5) $\dfrac{d}{dt} f(x_0+th)\Big|_{t=0} = Df(x_0)h$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $g(t)=x_0+th$ yazalım. $Dg(t)=h$ dır. $g(0)=x_0$

$$\frac{d}{dt} f(x_0+th)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f\circ g)(t)\Big|_{t=0} = Df(g(0))\,Dg(0)$$

$$= Df(x_0)\,h$$

bulunur.